ỦY BAN NHÂN DÂN XÃ MINH THÁI
TRƯỜNG THCS TRỰC ĐẠI

BẢN MÔ TẢ SÁNG KIẾN

Tên sáng kiến:

Một số phương pháp rèn kĩ năng giải phương trình vô tỷ bằng pương pháp nhân liên hợp

Lĩnh vực/ cấp học: Toán/ THCS

Tác giả (đồng tác giả):
1. Họ tên : Nguyễn Thị Nơ
2. Chức vụ, đơn vị công tác: Giáo viên, Trường THCS Trực Đại.

Minh Thái, tháng 5 năm 2026

I. Thông tin chung

1. Tên tác giả

TT	Họ và tên	Ngày tháng năm sinh	Trình độ chuyên môn	Chức vụ	Nơi công tác	Điện thoại	Tỷ lệ % đóng góp vào việc tạo ra sáng kiến *(ghi rõ đối với từng đồng tác giả)*	Chữ ký của tác giả, đồng tác giả
1	**Tác giả Nguyễn Thị Nơ**	**10/11/1977**	**Đại học Sư phạm Toán**	**Giáo viên**	**Trường THCS Trực Đại**	**0838255699**	**100%**	

Tên sáng kiến: **Một số phương pháp rèn kĩ năng giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nhân liên hợp.**

2. Lĩnh vực áp dụng (nêu rõ lĩnh vực có thể áp dụng sáng kiến và vấn đề mà sáng kiến giải quyết): Dùng cho học sinh đại trà trên lớp và chuyên đề ôn thi vào lớp 10, thi học sinh giỏi, thi vào vào các trường chuyên; nâng cao năng lực giải phương trình vô tỉ, nhẩm nghiệm, chứng minh vô nghiệm. Phát triển khả năng phân tích tổng hợp, tư duy sáng tạo và khắc phục sai lầm thường gặp khi giải phương trình vô tỷ.

3. Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử (ghi ngày nào sớm hơn): Từ tháng 9 năm 2025 đến tháng 3 năm 2026

II. Phần mở đầu

Cuộc cách mạng công nghiệp 4.0 đang diễn ra với nhiều cơ hội và thách thức mới. Để đáp ứng yêu cầu của sản xuất hiện đại, ngành giáo dục cần đào tạo nguồn nhân lực không chỉ có chuyên môn kĩ thuật mà còn có khả năng tư duy sáng tạo và độc lập khi giải quyết các vấn đề kĩ thuật trong thực tiễn. Trong "Chiến lược phát triển giáo dục 2021 – 2030" của Thủ tướng Chính phủ, vấn đề phát triển năng lực sáng tạo cho người học được xác định là một trong những mục tiêu quan trọng.

Như chúng ta đều biết: Dạy học cũng là một nghệ thuật. Dạy cái gì dạy. Dạy như thế nào. Sử dụng những phương pháp, phương tiện thích hợp nào để làm cho bài dạy có hiệu quả. Đây là một trong những vấn đề rất quan trọng đối với giáo viên. Để thực hiện tốt nhiệm vụ dạy học, người giáo viên phải tìm tòi các phương pháp, các thủ thuật và đặc biệt là tích lũy các kinh nghiệm để làm cho bài giảng của mình có chất lượng và hiệu quả hơn. Thực hiện việc dạy học cần phải phù hợp với khả năng, trình độ nhận thức của học sinh, dạy học theo tinh thần "Lấy người học làm trung tâm", quan tâm đến nhu cầu, năng nhận thức của từng đối tượng học sinh. Tổ chức việc dạy học theo hướng học sinh là người chủ động tìm kiếm, phát hiện, tự đưa ra suy luận để giải quyết vấn đề. Xuất phát từ thực tế dạy và học toán, việc học toán chính là một quá trình lĩnh hội các tri thức toán học. Trên cơ sở đó, học sinh biết vận dụng một cách sáng tạo những tri thức được học vào việc giải bài tập và thực tế cuộc sống. Do vậy việc dạy toán là quá trình người thầy giúp cho học sinh nắm được bản chất vấn đề mà các em cần được lĩnh hội, dạy toán là ngoài việc dạy cho các em tiếp thu kiến thức trong sách giáo khoa mà còn giúp các em biết vận dụng các kiến thức đã học vào cuộc sống.

Muốn đổi mới cách học phải đổi mới cách dạy. Cách dạy của thầy đóng vai trò chủ đạo, định hướng cách học của học sinh. Nhưng ngược lại thói quen học tập của trò cũng ảnh hưởng một phần tới cách dạy của thầy. Chẳng hạn, có trường hợp học sinh đòi hỏi cách dạy tích cực hoạt động giáo viên chưa đáp ứng được, hoặc có trường hợp giáo viên hăng hái áp dụng phương pháp dạy học tích cực nhưng không thành công vì học sinh chưa thích ứng, vẫn quen với lối học tập thụ động. Vì vậy, giáo viên phải kiên trì để dần dần xây dựng cho học sinh phương pháp học tập chủ động một cách vừa sức, từ thấp lên cao. Trong đổi mới phương pháp dạy học phải có sự hợp tác của cả thầy và trò, sự phối hợp nhịp nhàng hoạt động dạy với hoạt động học thì mới thành công. Như vậy, việc dùng thuật ngữ "Dạy và học tích cực" để phân biệt với "Dạy và học thụ động".

Phương pháp dạy học tích cực hướng tới việc hoạt động hóa, tích cực hóa hoạt động nhận thức của người học, nghĩa là tập trung vào phát huy tính tích cực của người học chứ không phải là tập trung vào phát huy tính tích cực của người dạy, tuy nhiên để dạy học theo phương pháp tích cực thì giáo viên phải nỗ lực nhiều so với dạy theo phương pháp thụ động.

Trong bộ môn Toán ở trường phổ thông thì phần Giải phương trình vô tỷ được xem là một trong những phần khó, nhiều học sinh khá thậm chí giỏi còn lo ngại, tránh né bởi vì học sinh chưa hình thành được những phương pháp giải đối với từng dạng toán để các em có thể vận dụng vào giải các bài toán. Chính vì vậy trong quá trình dạy người thầy giáo phải cố gắng phân thành từng chuyên đề, dạy cho HS cách định hướng phương pháp giải bài tập trước mỗi dạng bài. Trong quá trình giảng dạy tôi nhận thấy nhiều học sinh còn lúng túng, nhiều bỡ ngỡ và gặp nhiều khó khăn khi làm bài tập giải phương trình vô ti. Cho nên, nếu các em được trang bị các kiến thức một cách có hệ thống, có được những kĩ năng tư duy tốt, có cách suy nghĩ sáng tạo, khai thác tốt các kiến thức đã học vào việc giải bài tập sẽ đạt hiệu quả cao.

Giải phương trình vô tỉ trong Đại số nói chung và Đại số 9 nói riêng là một nội dung khó đối với đa số học sinh cũng một số giáo viên. Mặc dù là lớp cuối cấp nhưng khi gặp các phương trình này không ít học sinh còn "lúng túng, không biết phải bắt đầu từ đâu, hướng giải quyết thế nào?" Từ bài tập đơn giản đến phức tạp, từ các bài tập mang tính chất củng cố kiến thức đơn lẻ đến các bài tập mang tính tổng hợp, các em thường gặp khó khăn trong việc tìm lời giải mà tài liệu về nội dung này gần như chưa có để đáp ứng nhu cầu dạy và học của thầy và trò. Nên khi gặp dạng toán này học sinh còn lúng túng, khó tìm ra cách giải và học sinh chưa nắm được phương pháp. Khi học sinh đi thi gặp dạng toán này gần như các em không làm được.

Từ những trăn trở và suy nghĩ trên tôi đã mạnh dạn tìm tòi và nghiên cứu viết "Một số giải pháp rèn kì năng giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nhân lien hợp, giúp các em nắm được các phương pháp giải và tránh được những sai lầm khi làm dạng toán này. Tôi cũng không tham vọng nhiều mà chỉ mong giải quyết được phần lớn những khó khăn trên, vấn đề mà nhiều học sinh và thầy cô đang trăn trở.

III. Phần nội dung

1. Mô tả giải pháp đã biết

(Qua quá trình giảng dạy môn Toán lớp 9 và kết hợp tham khảo các ý kiến của đồng nghiệp, tôi nhận thấy trong quá trình hướng dẫn học sinh giải Toán "Rèn kĩ năng giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nâng nhân lien hợp" thì phần lớn học sinh rất khó khăn trong việc vận dụng các kiến thức đã học để giải dạng toán này. Sự vận dụng lý thuyết vào việc giải bài tập của học sinh còn thiếu tính linh hoạt. Khi gặp một bài toán đòi hỏi phải vận dụng và có sự tư duy thì học sinh không xác định được phương hướng để giải bài toán dẫn đến không làm được hoặc làm sai.

Khi tôi chưa áp dụng đề tài này, tôi thấy học sinh còn rất lúng túng về phương pháp giải, chưa nắm vững phương pháp giải đối với từng dạng bài, quá trình giải chưa chặt chẽ, thậm chí có bài không tìm ra hướng giải dẫn đến bế tắc. Nhiều em sợ học bài giải phương trình vô tỉ kể cả nhiều em trong đội tuyển học sinh giỏi.

Để nắm bắt được học sinh của mình có giải được dạng toán này tôi đã mạnh dạn bổ sung thêm bài giải phương trình vô tỉ trong bài kiểm tra giữa kì

Qua việc khảo sát, tôi thu được kết quả như sau:

Lớp	Giỏi	Khá	Trung bình	Yếu và kém
9A	20%	30%	30%	20%
9B	5%	20%	25%	50%

Nhìn vào bảng tổng hợp trên ta thấy kết quả tương đối thấp. Nguyên nhân là do học sinh vướng mắc những điều tôi đã nêu ra (ở phần trên) và phần lớn các em không tìm được đường hướng.

2. Nội dung các giải pháp mới; tính mới, tính sáng tạo; hiệu quả áp dụng, khả năng nhân rộng của sáng kiến

2.1. Nội dung các giải pháp mới (Trình bày đầy đủ, chi tiết, bản chất của các giải pháp mới gồm: biện pháp, các bước cụ thể đã tiến hành để giải quyết vấn đề; các nội dung đã cải tiến, sáng tạo, trong đó có nhận xét về vai trò, tác dụng, hiệu quả của biện pháp; tính ưu việt của giải pháp mới để khắc phục những nhược điểm của giải pháp cũ):

Qua nhiều năm thực tế giảng dạy tôi nhận thấy thực tế giảng dạy tôi thấy rằng học sinh có lỗ hổng ngay từ khi tiếp cận bài tập giải phương trình vô tỷ lớp 9. Việc nhận dạng của học sinh còn lúng túng, chưa nhận biết bài tập thuộc dạng nào. Vì vậy trên cơ sở những lý luận về đổi mới phương pháp dạy học và thực tế học sinh của trường, tôi tiến hành nghiên cứu nội dung "***Rèn kì năng giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nhân liên hợp***" trong chương trình Toán 9 và thiết kế hoạt động dạy học này theo hướng tích cực hóa hoạt động của học sinh và khi giảng dạy tôi kiểm tra, so sánh các yêu cầu sau:

+ Tích cực suy nghĩ lĩnh hội kiến thức, rèn luyện kĩ năng.

+ Phát triển tư duy khái quát hóa, tổng hợp hóa.

+ Sáng tạo trong cách giải bài tập, mạnh dạn trình bày và bảo vệ ý kiến, quan điểm cá nhân.

+ Rèn luyện kĩ năng bộ môn Toán.

Cùng những kinh nghiệm của đồng nghiệp, từ thực tế lên lớp, qua những tiết bồi dưỡng học sinh giỏi. Bản thân tôi luôn có sự thử nghiệm, so sánh và ghi chép những điều cần thiết cho tiết dạy sau tốt hơn, hiệu quả hơn tiết dạy trước.

Trước hết tôi yêu cầu học sinh nắm vững và ghi nhớ các kiến thức cần thiết để giải bài tập "Giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nhân liên hợp".

2.1. Một số kiến thức cần nhớ

a. Một số phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử

- Phương pháp đặt nhân tử chung
- Phương pháp dùng hằng đẳng thức
- Phương pháp tách hạng tử;...

b. Một số hằng đẳng thức

$$\left(A+B\right)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\left(A-B\right)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$\left(A+B\right)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$\left(A-B\right)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \dfrac{A \mp B}{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}$, với mọi A, B lớn hơn 0 và A khác B.

$\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B} = \dfrac{A \mp B}{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{A.B} + \sqrt[3]{B^2}}$, với mọi A, B.

$\sqrt[4]{A} \pm \sqrt[4]{B} = \dfrac{A \mp B}{(\sqrt[4]{A} \mp \sqrt[4]{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}$ $\sqrt[4]{A} \pm \sqrt[4]{B} = \dfrac{A \mp B}{(\sqrt[4]{A} \mp \sqrt[4]{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}$, với mọi A, B lớn hơn 0 và A khác B.

***Một số phương pháp và kĩ thuật giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nhân liên hợp.**

3.1 Cơ sở lý luận

Phép toán nâng lên lúy thừa là phép biến đổi tự nhiên và tương đối dễ thực hiện. Phương pháp này được sử dụng trực tiếp hay gián tiếp. Những bài toán sử dụng phương pháp này thường là những bài thuộc dạng cơ bản hoặc chứa các hằng đẳng thức. Mục đích của phép biến đổi này là làm mất dấu căn của phương trình. Để biến đổi hai vế của phương trình ta cần kiểm tra dấu hai vế xem có cùng dấu không (thường thì hai vế phải không âm).

4.2. Các bước giải

Bước 1: Tìm điều kiện xác định;

Bước 2: Biến đổi làm mất dấu căn bằng cách nhân cả tử và mẫu của một thành phần với một lượng liên hợp.

Bước 3: Giải phương trình tìm được;

Bước 4: Đối chiếu giá trị tìm được của ẩn với điều kiện xác định và kết luận.

4.3. Một số dạng

- Giải pháp 1(Phương pháp 1

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}},\text{ voi } f^2(x)+g^2(x)>0$$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+2x=\sqrt{x-4}-5$.

Phân tích

Nhận thấy $(3x+1)-(x-4)=2x+5$, và $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}>0,\forall x\geq 4$ nên ta có thể thực hiện phép biến đổi $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}=\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}$ để làm xuất hiện nhân tử $(2x+5)$.

Lời giải

Điều kiện $x\geq 4$.

Ta có $\sqrt{3x+1}+2x=\sqrt{x-4}-5$

$$\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-4}\right)+2x+5=0$$

$$\frac{2x+5}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+2x+5=0$$

$$(2x+5)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+1\right)=0$$

Suy ra $2x+5=0\left(Do\ \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}}+1>0,\forall x\geq 4\right)$

$$x=-\frac{5}{2}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra $x=-\dfrac{5}{2}$ không thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2+5x+5}+x^2=\sqrt{x+2}-3x-2$.

Phân tích

Nhận thấy $\left(x^2+5x+5\right)-(x+2)=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ và $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ đồng thời: $\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}\neq 0$ nên ta có thể thực hiện phép biến đổi: $\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}$ để làm xuất hiện nhân tử $(x+1)$.

Lời giải

Điều kiện $x\geq\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\left(\sqrt{x^2+5x+5}-\sqrt{x+2}\right)+x^2+3x+2=0$$

$$\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x^2+3x+2=0$$

$$(x+1)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2\right)=0$$

Suy ra $x+1=0$ ($Do\frac{x+3}{\sqrt{x^2+5x+5}+\sqrt{x+2}}+x+2>0,\forall x\geq\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$)

$x=-1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-1$.

Lời bình

Ở ví dụ này, ta cần chú ý biến đổi tích không đẹp xem có nghiệm hay không tránh thiếu nghiệm

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x^2=\sqrt{2(x-1)}+1$.

Phân tích

Nhận thấy $(x^2+x-2)-(2x-2)=x^2-x=x(x-1)$ và $x^2-1=(x-1)(x+1)$, như vậy khi chúng ta thực hiện phép nhân liên hợp sẽ xuất hiện nhân tử: $(x-1)$. Tuy nhiên khi $x=1,$ biểu thức $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}=0$ do đó biến đổi

$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}=\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}$ là một phép biến đổi không có nghĩa

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1$.

+ Nhận thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Thật vậy, khi $x=1$ thì phương trình trở thành $\sqrt{1^2+1-2}+1^2=\sqrt{2(1-1)}+1$ (đúng)

+ Với $x>1$, ta đưa phương trình đã cho về dạng:

$$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2(x-1)}+x^2-1=0$$

$$(x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1\right)=0(*)$$

Khi $x>1$ thì $x-1>0$ và $\frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2(x-1)}}+x+1>0$ nên phương trình (*) không có nghiệm $x>1$.

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời bình

Trước khi thực hiện phép nhân liên hợp ta cần chú ý đến biểu thức liên hợp đã khác 0 hay chưa. Để xử lý các dạng toán này ta có thể chia ra các trường hợp của x làm cho $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=0$ và trường hợp $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\neq 0$.

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-1}+x+4=0$.

Phân tích

Nhận thấy $(2x+3)-(x-1)=x+4$ và không có giá trị nào của $x\in$ làm cho các biểu thức $\sqrt[3]{2x+3},\ \sqrt[3]{x-1}$ đồng thời bằng 0. Do đó ta có thể thực hiện phép nhân liên hợp để xuất hiện nhân tử $(x+4)$.

Lời giải

$$\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{x-1}+x+4=0$$

$$(x+4)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+\sqrt[3]{(2x+3)(x+1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}+1\right)=0$$

$x=-4$, *Do* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}+\sqrt[3]{(2x+3)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}+1>0,\forall x\in$

- Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=-4$.

Lời bình

Ví dụ 4 đã trình bày hướng giải phương trình tương tự như ở ví dụ 3, tuy nhiên sau khi biến đổi chú ý biến đổi chứng minh hạng tử thứ 2 thường vô nghiệm

Ví dụ 5: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}+x-5=0$.

Phân tích.

Nhận thấy: $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho

Lời giải

Điều kiện $x\ge -\dfrac{1}{3}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)+x-1=0$$

$$\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+x-1=0$$

$$(x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+1\right)=0$$

Suy ra $x=1$ (Do $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}+1>0,\forall x\ge -\dfrac{1}{3}$)

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời bình

Từ các phân tích đó ta có thể viết phương trình dưới dạng:

$\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\left(\sqrt{x+3}-2\right)+x-1=0$ để đưa phương trình về dạng có nhân tử $(x-1)$.

Ví dụ 6: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

Phân tích.

- Nhận thấy $x=5$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Lời giải

Điều kiện $-\dfrac{1}{3}\le x\le 6$.

$\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0$

$\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$

$(x-5)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)\right]=0$

Suy ra $x=5$ (*Do* $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)>0, \forall x\in\left[-\frac{1}{3};6\right]$)

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=5$.

Lời bình

Từ các phân tích đó ta có thể viết lại phương trình thành

$\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)+3x^2-14x-5=0$ để đưa phương trình về dạng có nhân tử $(x-5)$.

✓BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+1}+1$.

Hướng dẫn:

Điều kiện: $x\ge -2$. Phương trình đã cho trở thành

$\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+1}\right)+\left(\sqrt{x+2}-1\right)=0$

$\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}=0$

$(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}\right)=0$

Suy ra $x=-1$ (*Do*: $\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+1}>0, \forall x\ge -2$)

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=-1$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$.

Hướng dẫn:

Điều kiện $x\ge -3$. Phương trình đã cho trở thành

$\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5x+3}=4$

$\left(\sqrt{x+3}-2\right)+\left(\sqrt[3]{5x+3}-2\right)=0$

$\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5(x-1)}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}=0$

$(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}\right)=0$

Suy ra $x=1$ (*Do* $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4}>0, \forall x\ge -3$)

- Kết luận. Phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x-3}+\sqrt{3x+1}=2-x$.

Hướng dẫn:

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho trở thành $\left(\sqrt[3]{2x-3}+1\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+\left(x-1\right)=0$

$$\frac{2(x-1)}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+(x-1)=0$$

$$(x-1)\left(\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1\right)=0$$

Suy ra $x=1$ (*Do* $\frac{2}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[3]{2x-3}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+1>0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$)

- Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+x^3=\sqrt{2x+2}+x^2+x$. Đáp số: $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x+5}+x^3=\sqrt{2x-1}+4x^2-x-6$. Đáp số: $x=2;\ x=3$.

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+1}+x=\sqrt[3]{x-5}-6$. Đáp số: $x=-6$.

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-x-1}+x^2+2=\sqrt[3]{2x-3}+3x$. Đáp số: $x=1;\ x=2$.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+5}+x^3=\sqrt[3]{x+5}$. Đáp số: $x=0$.

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-2}+4x=1$. Đáp số: $x=\frac{1}{4}$.

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{2x-1}+x^3=1$. Đáp số: $x=1$.

- *Giải pháp 2:* $f(x)-g(x)=\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)$, với $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1: Giải phương trình $2+\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=x$.

Phân tích

Nhận thấy $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)=(3x-5)-(x-1)=2(x-2)$Do vậy, nếu ta biến đổi $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=\frac{2(x-2)}{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}}$, ta sẽ có nhân tử

Lời giải

Điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$.

Phương trình đã cho trở thành $2(x-2)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$$

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2\right)=0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=0\,(VN)\\ \sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0\end{array}\right.$

Lại có: $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0$

$x-4=2\sqrt{x-1}$

Khi và chỉ khi $\begin{cases}x\geq 4\\ x^2-12x+20=0\end{cases}$

Suy ra $x=10$

- Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x=10$.

Lời bình

Tuy nhiên vấn đề nảy sinh ở đây là chưa đảm bảo được rằng biểu thức $\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)$ khác 0 và để khắc phục nó chúng ta có thể xét 2 trường hợp $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}=0$ và $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\neq 0$. Song để tránh sự rối rắm không cần thiết, ta chọn phương án biến đổingược lại, đó là:

$2(x-2)=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right),$

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$.

Phân tích

Nhận thấy $\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)=\left(x^2+x-2\right)-(x-1)=x^2-1$

từ đó ta có lời giải sau:

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)$

$\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$ $(1)\begin{cases}x-1=0\\ x^2+x-2=0\end{cases}$

$x=1$

$(2)\,x^2-2=2\sqrt{x-1}$

$\begin{cases}x\geq\sqrt{2}\\ x^4-4x^2-4x+8=0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq\sqrt{2}\\ (x-2)\left(x^3+2x^2-4\right)=0\end{cases}$

$x=2$

$Do: x^3+2x^2-4\geq 2\sqrt{2}+4-4>0,\forall x\geq\sqrt{2}$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $T=\{1;2\}$.

Lời bình

Cần chú ý kết hợp điều kiện để tránh nhầm nghiệm

Ví dụ 3: Giải phương trình $\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$.

Phân tích

Ta nhận thấy $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x,$ tuy nhiên kh sử dụng phép nhân thêm lượng liên hợp ta phải chia thành các trường hợp $\sqrt{1+x}-1=0$ vaø $\sqrt{1+x}-1\neq 0.$

Lời giải

Điều kiện $x\geq 0.$ Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(1+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}.$$

$$\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{1+x}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\left(\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}\right)+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$$

$$\frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$$

$$\frac{\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(x-1-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+\left(x-1+\sqrt{x}\right)=0$$

$$\left(x-1+\sqrt{x}\right)\left(\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{ll} x-1+\sqrt{x}=0 & (1)\\ \sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}+x-1-\sqrt{x}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Khi đó:

$$x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Hoặc $\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)+\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)=0(*)$

Ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+x-1\geq\sqrt{(x-1)^2}+(x-1)\geq(1-x)+(x-1)=0\\ \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\geq\sqrt{x}-\sqrt{x}=0\end{cases}$$

Do đó $(*)$ trở thành $x=0$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2};0\right\}.$

- *Giải pháp 3:* **Liên hợp nhẩm 2 nghiệm**

Phương pháp giải chung

Đặt điều kiện chặt của phương trình nếu có

Sử dụng định lý Vi-et đảo ta có nhân tử chung sẽ là $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$

Để làm xuất hiện nhân tử chung trong $\sqrt[n]{f(x)}$ ta trừ đi một lượng $ax+b$ khi đó nhân tử chung sẽ là kết quả sau khi nhân liên hợp của $\sqrt[n]{f(x)}-(ax+b)$

Xét phương trình $\sqrt[n]{f(x)}-(ax+b)=0$. Để phương trình có 2 nghiệm ta cần tìm a; b sao cho $\begin{matrix} ax_1+b=\sqrt[n]{f(x_1)} \\ ax_2+b=\sqrt[n]{f(x_2)} \end{matrix}$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Giải phương trình $4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}=x^2+2x+9$

Phân tích

Điều kiện: $3 \quad x \quad \frac{19}{3}$

Ta nhẩm được 2 nghiệm là $x=1,\ x=-2$ nên ta phân tích để tạo ra nhân tử chung là: x^2+x-2.

Để làm được điều này ta thực hiện thêm bớt nhân tử như sau:

+ Ta tạo ra $4\sqrt{x+3}-(ax+b)=0$ sao cho phương trình này nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Để có điều này ta cần: $\begin{matrix} a+b=8 \\ -2a+b=4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{20}{3} \end{matrix}$

+ Tương tự $\sqrt{19-3x}-(mx+n)=0$ nhận $x=1, x=-2$ là nghiệm.

Tức là $\begin{matrix} m+n=5 \\ -2m+n=5 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{matrix}$

Lời giải

Điều kiện: $3 \quad x \quad \frac{19}{3}$

$$4\sqrt{x+3}-\ \frac{4}{3}x+\frac{20}{3}\ +\sqrt{19-3x}-\ \frac{13}{3}-\frac{x}{3}\ -\left(x^2+x-2\right)=0$$

$$\frac{4}{3}\ 3\sqrt{x\quad 3}\quad (x\quad 5)\quad \frac{3\sqrt{19-3x}-(13-x)}{3}\quad \left(x^2\quad x\quad 2\right)\quad 0$$

$$\frac{4}{3}\ \frac{-x^2-x+2}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}\quad \frac{-x^2-x+2}{3\ 3\sqrt{19-3x}+(13-x)}\quad \left(x^2\quad x\quad 2\right)\quad 0$$

$$\left(x^2\quad x\quad 2\right)\ \frac{4}{3}.\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}\quad \frac{1}{3\ 3\sqrt{19-3x}+(13-x)}\quad 1\quad 0$$

Dễ thấy với $3 \quad x \quad \frac{19}{3}$ thì $\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}>0$, $\frac{1}{3\ 3\sqrt{19-3x}+(13-x)}>0$

Nên $\frac{4}{3}.\frac{1}{3\sqrt{x+3}+(x+5)}+\frac{1}{3\ 3\sqrt{19-3x}+(13-x)}+1>0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 \quad x \quad 2 \quad 0 \quad \begin{matrix} x=1 \\ x=-2 \end{matrix}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\frac{2x-11}{5}$

Phân tích

Phương trình được viết lại như sau: $5\sqrt{3x-8}-5\sqrt{x+1}=2x-11$

Ta nhẩm được 2 nghiệm $x=3; x=8$ nên suy ra nhân tử chung là: $x^2-11x+24$

Ta phân tích với nhân tử $5\sqrt{3x-8}$ như sau:

+ Tạo ra $5\sqrt{3x-8}-(ax+b)=0$ sao cho phương trình này nhận $x=3, x=8$ là nghiệm. Tức là a, b cần thỏa mãn hệ: $\begin{matrix} 3a+b=5 \\ 8a+b=20 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a=3 \\ b=-4 \end{matrix}$

+ Tương tự với $5\sqrt{x+1}-(mx+n)=0$ ta thu được: $\begin{matrix} 3m+n=10 \\ 8m+n=15 \end{matrix} \quad \begin{matrix} m=1 \\ n=7 \end{matrix}$

Lời giải

Điều kiện: $x \quad \frac{8}{3}$.

$$5\sqrt{3x-8}-(3x-4)+(x+7)-5\sqrt{x+1}=0$$

$$\frac{-9(x^2-11x+24)}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} \quad \frac{x^2-11x+24}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} \quad 0$$

$$\left(x^2 \quad 11x \quad 24\right)\ \frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)} \quad \frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}} \quad 0$$

$$x^2-11x+24=0$$

$$\frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}=0$$

Ta xét $A(x)=\frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}$

Ta chứng minh: $A(x)<0$ tức là: $\frac{-9}{5\sqrt{3x-8}+(3x-4)}+\frac{1}{(x+7)+5\sqrt{x+1}}<0$

$$5\sqrt{3x \quad 8} \quad 3x \quad 4 \quad 9(x \quad 7 \quad 5\sqrt{x \quad 1}) \quad 0$$

$$3x \quad 8 \quad 5\sqrt{3x \quad 8} \quad \frac{25}{4} \quad \frac{275}{4} \quad x \quad 45\sqrt{x \quad 1} \quad 0$$

$\sqrt{3x \quad 8} \quad \frac{5}{2}^{\ 2} \quad \frac{275}{4} \quad x \quad 45\sqrt{x \quad 1} \quad 0$. Điều này là hiển nhiên đúng.

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=3, x=8$.

Lời bình

Những đánh giá để kết luận $A(x)<0$ thường là những bất đẳng thức không chặt nên ta luôn đưa về được tổng các biểu thức bình phương.

Ngoài ra nếu tinh ý ta có thể thấy: $5\sqrt{3x-8}+3x-4-9(x+7+5\sqrt{x+1})<0$

$5\sqrt{3x\quad 8}\quad 3x\quad 4\quad 9x\quad 63\quad 5\sqrt{81x\quad 81}$ Nhưng điều này là hiển nhiên đúng do: $5\sqrt{3x-8}<5\sqrt{81x+81};3x-4<9x+63$ với mọi $x\quad \frac{8}{3}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{5-4x^2}=4x^2$.

Phân tích

Phương trình này hình thức cho ta biết hai phương pháp mà ta vừa phân tích ở trên hoàn toàn bất lực với phương trình này. Sử dụng máy tính ta biết phương trình này có nghiệm $x=\frac{1}{2};1$. Do đó ta sẽ cần tìm cách liên hợp để xuất hiện cho được nhân tử chứa hai nghiệm này. Với phương trình này, ta cần tìm nhân tử có dạng là một tam thức bậc hai vì phương trình đã cho có hai nghiệm.

Do đó với hai giá trị của nghiệm ta sẽ thu được hai số a, b thỏa hệ đẳng thức: $3\sqrt{2x-1}-(ax+b)=0$.

Thay lần lượt hai giá trị nghiệm của phương trình ta thu được $a=6;\ b=-3$

Tương tự cho đẳng thức: $\sqrt{5-4x^2}-(cx+d)=0$

Ta sẽ thu được $c=-2;\ d=3$.

Lúc đó ta sẽ hoàn thiện phương trình bằng cách thêm bớt sao cho phương trình vẫn không đổi và bắt đầu liên hợp.

Lời giải

Điều kiện $\begin{matrix} 2x\quad 1\quad 0 \\ 5\quad 4x^2\quad 0 \end{matrix}\quad \frac{1}{2}\quad x\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Với $x=\frac{1}{2}$, phương trình không thỏa.

Với $\frac{1}{2}\quad x\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$, ta biến đổi phương trình đã cho thành:

$$3\sqrt{2x-1}-(6x-3)+x\ \sqrt{5-4x^2}-(3-2x)\ -3\left(2x^2-3x+1\right)=0$$

$$6\frac{\left(2x^2-3x+1\right)}{\sqrt{2x-1}+2x-1}\quad \frac{4x\left(2x^2-3x+1\right)}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}\quad 3\left(2x^2\quad 3x\quad 1\right)\quad 0$$

$$\left(2x^2\quad 3x\quad 1\right)\ \frac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}\quad \frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}\quad 3\quad 0\ (1)$$

Nhận xét: $\frac{6}{\sqrt{2x-1}+2x-1}+\frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}+3-2x}+3>0,\ \frac{1}{2}\quad x\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Do đó từ (1) ta có: $2x^2-3x+1=0\quad x\quad \frac{1}{2}\quad x\quad 1$.

Đối chiếu với điều kiện $\frac{1}{2} \quad x \quad \frac{\sqrt{5}}{2}$, ta có nghiệm là $x = 1$.

Kết hợp lại ta có nghiệm là: $x = \frac{1}{2};1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{x^3+15}+2=\sqrt{x^3+8}+3x$

Hướng dẫn

Phương trình được viết lại như sau:

$$\sqrt{x^3 \quad 15} \quad 2 \quad \sqrt{x^3 \quad 8} \quad 3x \quad \sqrt{x^3 \quad 15} \quad \sqrt{x^3 \quad 8} \quad 3x \quad 2.$$

Để phương trình có nghiệm ta cần: $3x \quad 2 \quad 0 \quad x \quad \frac{2}{3}$.

Nhẩm được $x = 1$ nên ta viết lại phương trình thành:

$$\sqrt{x^3+15}-4=\sqrt{x^3+8}-3+3x-3$$

$$(x \quad 1) \frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+15}+4} \quad \frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+8}+3} \quad 3 \quad 0$$

Để ý rằng: $\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+15}+4}-\frac{\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^3+8}+3}-3<0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}+1-x=0$

Hướng dẫn

Điều kiện $x \quad 3; \quad \frac{1}{3}$

Ta viết lại phương trình như sau: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}+1-x=0$

$$\frac{2x-2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \quad 1 \quad x \quad 0 \quad (2x \quad 2)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \quad \frac{1}{2}\right) \quad 0$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2$$

Xét phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2$. Bình phương 2 vế ta thu được:

$$4x \quad 4 \quad 2\sqrt{(3x \quad 1)(x \quad 3)} \quad 4 \quad \sqrt{(3x \quad 1)(x \quad 3)} \quad 2x \quad \begin{array}{l} x \quad 0 \\ x^2-10x-3=0 \end{array}$$

$$x \quad 5 \quad 2\sqrt{7}$$

Kết luận: Phương trình có 2 nghiệm là $x = 1,\ x = 5-2\sqrt{7}$

Nhận xét:

+ Ta thấy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Nếu ta phân tích phương trình thành $\sqrt{3x+1}-2+2-\sqrt{x+3}+4-4x=0$ thì sau khi liên hợp phương trình mới thu được sẽ là: $\frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1-x}{2+\sqrt{x+3}}+4-4x=0$

$(x \quad 1)\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \quad \frac{1}{2+\sqrt{x+3}} \quad 4 \quad 0$. Rõ ràng phương trình hệ quả $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{x+3}}-4=0$ phức tạp hơn phương trình ban đầu rất nhiều.

+ Để ý rằng khi $x=1$ thì $\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ nên ta sẽ liên hợp trực tiếp biểu thức $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}$.

Bài 3. $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}$ Điều kiện: $x>0$

Hướng dẫn

Ta nhẩm được $x=1;x=3$ nên biến đổi phương trình như sau:

Ta có: khi $x \quad 1 \quad \frac{x^2+7}{2(x+1)}=2$, khi $x \quad 3 \quad \frac{x^2+7}{2(x+1)} \quad 2$ nên ta trừ 2 vào 2 vế thì thu được:

$$\sqrt{x \quad \frac{3}{x}} \quad 2 \quad \frac{x^2+7}{2(x+1)} \quad 2 \quad \frac{\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad \frac{x^2-4x+3}{2(x+1)}$$

$$\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x^3+3x}+2x} \quad \frac{x^2-4x+3}{2(x+1)} \quad \begin{array}{ll} x^2-4x+3=0 & (1) \\ \sqrt{x^3+3x}+2x=2(x+1) & (2) \end{array}$$

Giải (1) suy ra $x=1,x=3$

Giải (2) ta có: $\sqrt{x^3+3x}+2x=2(x+1)$

$\sqrt{x^3 \quad 3x} \quad 2 \quad x^3 \quad 3x \quad 4 \quad 0 \quad x \quad 1$

Kết luận: Phương trình có nghiệm là $x=1;x=3$

- *Giải pháp 4:* **Liên hợp truy ngược dấu**

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt[3]{7x-8}+5\sqrt{x-1}+2=x\sqrt{2x-1}$.

Phân tích

Đây là bài toán khá hay để chứng tỏ được sức mạnh của phương pháp nhân lượng liên hợp và kĩ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp. Thật vậy, sử dụng máy tính ta biết được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\{1;5\}$. Điều này có nghĩa rằng ta cần phải tạo ra nhân tử là một tam thức bậc hai x^2-6x+5. Tuy nhiên với các hệ số như bài toán đang có ta sẽ sử dụng kỉ thuật truy ngược dấu biểu thức liên hợp để tạo thuận lợi trong việc đánh giá.

Tức là thay vì ta dùng biểu thức liên hợp dạng: $\sqrt{f(x)}-(ax+b)$.

Ta sẽ dùng ngược lại như sau: $(ax+b)-\sqrt{f(x)}$.

Với việc sử dụng ngược này tức là ta đã có một động thái đảo dấu rất có lợi trong khi giải quyết phần còn lại khi bắt được nhân tử.

Lời giải

Điều kiện $x \quad 1.$

Với $x=1,$ phương trình đã cho được nghiệm đúng.

Với $x>1,$ ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình:

$$2\sqrt[3]{7x-8}+10\sqrt{x-1}+4=2x\sqrt{2x-1}$$

$$x\left(x \quad 1 \quad 2\sqrt{2x \quad 1}\right) \quad 5\left(x \quad 1 \quad 2\sqrt{x \quad 1}\right) \quad \left(x^2 \quad 6x \quad 5\right) \quad 2\left(x \quad 2 \quad \sqrt[3]{7x \quad 8}\right)$$

$$\frac{x\ (x+1)^2-4(2x-1)}{x+1+2\sqrt{2x-1}} \qquad \frac{5\ (x-1)^2-4(x-1)}{x-1+2\sqrt{x-1}}$$

$$(x-1)(x-5)+\frac{2\ (x-2)^3-(7x-8)}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt[3]{(7x-8)^2}}$$

$$(x \quad 1)(x \quad 5).$$

$$\frac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}}+\frac{2x}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt[3]{(7x-8)^2}}+1-\frac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}} \quad =0 \ (1)$$

Với $x>1$ ta có: $\dfrac{5}{x-1+2\sqrt{x-1}}>0,\ \dfrac{2x}{(x-2)^2+(x-2)\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt[3]{(7x-8)^2}}>0.$

Lại có: $\dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}}<\dfrac{x}{x+1}<1 \quad 1 \quad \dfrac{x}{x+1+2\sqrt{2x-1}} \quad 0.$

Do đó từ (1) ta có: $(x-1)(x-5)=0 \quad x \quad 1 \quad x \quad 5.$

Đối chiếu điều kiện $x>1$ ta có $x=5.$

Kết hợp lại ta có nghiệm của phương trình là $x=1;\ x=5.$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $2x^2-9x+6=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$

Phân tích

Việc chỉ ra nghiệm $x=1$ trước lí do như ví dụ trên, việc nhân hệ số 2 trước khi phân tích có được là do trong quá trình tìm các hệ số bất định để tạo biểu thức liên hợp có chứa phân số có mẫu là 2. Sử dụng kỉ thuật truy ngược đặc biệt có lợi cho các bài toán mà hệ số của chúng có cách đặt để như nhân hệ số trước cân bằng một biểu thức chứa biến. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp thì cả "thuận" và "ngược" đều có lời giải tối ưu.

+) Điều kiện: $3 \quad x \quad 5$

+) Phương trình $\quad 2x^2 \quad 9x \quad 4 \quad \left(\sqrt{x \quad 3} \quad 1\right) \quad \left(\sqrt{5 \quad x} \quad 1\right)$

$$(x \quad 4)(2x \quad 1) \quad \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{\left(\sqrt{5-x}-1\right)\left(\sqrt{5-x}-1\right)}{\sqrt{5-x}+1}$$

$$(x \quad 4)(2x \quad 1) \quad \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{4-x}{\sqrt{5-x}+1}$$

$$(x \quad 4) \ 2x \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} \quad 0$$

$x = 4(n)$

$$2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} = 0(*)$$

Đến đây ta không dễ chứng minh phương trình (*) vô nghiệm. Đây chính là tình trạng phổ biến khi giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp liên hợp. Sau đây thầy Quý chỉ các bạn phương pháp liên hợp ngược dấu xử lý đơn giản vấn đề trên.

Giải

+) Điều kiện: $3 \quad x \quad 5$

+) Phương trình $\quad 2x^2 \quad 9x \quad 6 \quad x \quad 2 \quad \sqrt{x \quad 3}\left(\sqrt{x \quad 3} \quad 1\right) \quad \left(\sqrt{5 \quad x} \quad 1\right)$

$$2x^2 \quad 10x \quad 8 \quad \frac{-\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{\left(\sqrt{5-x}-1\right)\left(\sqrt{5-x}+1\right)}{\sqrt{5-x}+1}$$

$$(x \quad 4)(2x \quad 2) \quad \frac{-\sqrt{x-3}(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{4-x}{\sqrt{5-x}+1}$$

$$(x \quad 4) \; 2x \quad 2 \quad \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} \quad \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} \quad 0$$

$x = 4$

$$2x - 2 + \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}+1} = 0(*)$$

+) Do $3 \quad x \quad 5 \quad 2x \quad 2 \quad 4 \quad TV(*) \quad 0 \quad PT(*)$ vô nghiệm.

+) Kết luận: Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4\}$.

Ví dụ 3: Giải phương trình $2x^2 - 5x - 1 = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

Phân tích

Phương trình có duy nhất 1 nghiệm $x = 3$, thay nghiệm đó vào $\sqrt{x-2} = 1; \sqrt{4-x} = 1$ Nhưng khi thay vào biểu thức ta nhận thấy không đồng nhất về dấu, từ đây ta tìm ra ý tưởng để cả hai cùng mang dấu "+" hoặc "−" do vậy ta sẽ truy ngược dấu

Lời giải

ĐKXĐ: $2 \quad x \quad 4$

$$\left(1-\sqrt{4-x}\right) + \sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-1\right) + 2x^2 - 6x = 0$$

$$\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} + \frac{(x-3)\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} + 2x(x-3) = 0$$

$$(x-3)\;\frac{1}{1+\sqrt{4-x}} + \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} + 2x \;= 0$$

$x = 3$

$$\frac{1}{1+\sqrt{4-x}} \quad \frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt{x-2}} \quad 2x \quad 0 \quad x \quad [2;4]$$

Ví dụ 4: Giải phương trình:

Phân tích

Bài toán chứa hai căn thức, ta đi đặt căn có chứa biểu thức đơn giản là ẩn rồi đi biểu thị các biểu thức còn lại theo ẩn, giải phương trình mới sẽ dùng truy ngược dấu nhanh gọn.

Lời giải

Điều kiện: $x \quad \frac{1}{2}$

Đặt $\sqrt{2x \quad 1} \quad t, t \quad 0 \quad \frac{t^2+1}{2}; x^2 \quad x \quad 1 \quad \frac{t^4+3}{4}; 4x \quad 2 \quad 2t^2$

Khi đó $(1) \quad 2t^2 \quad \sqrt{\frac{t^4+3}{4}} \quad t \quad 4t^2 \quad 2t \quad \sqrt{t^4 \quad 3} \quad 0 \qquad (1')$

Đoán được phương trình ban đầu có nghiệm x = 1 nên t có giá trị bằng 1 hay phương trình (1’) có nhân tử (t - 1), và đây là nghiệm duy nhất, ta tiến hành nhân liên hợp, nếu liên hợp với hằng số bình thường, ta thu được kết quả sau số bình thường, ta thu được kết quả sau:

$$(1') \quad (t \quad 1)\ 4t \quad 2 \quad \frac{(1+t)\ 1+t^2}{2+\sqrt{t^4+3}} \quad 0$$

$$t=1$$

$$4t-2-\frac{(1+t)(1+t^2)}{2+\sqrt{t^4+3}}$$

$$(1') \quad 3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad \left(t^2 \quad 1 \quad \sqrt{t^4 \quad 3}\right) \quad 0$$

$$(t \quad 1)(3t \quad 1) \quad \frac{2t^2-2}{t^2+1+\sqrt{t^4+3}} \quad 0$$

$$(t \quad 1)\ 3t \quad 1 \quad \frac{2(t+1)}{t^2+1+\sqrt{t^4+3}} \quad 0$$

$$t \quad 1 \text{ do } 3t \quad 1 \quad \frac{2(t+1)}{t^2+1+\sqrt{t^4+3}} \quad 0 \quad t \quad 0$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho

Lời bình:

Bài toán đã thể hiện rõ phương pháp truy ngược dấu do phương trình (1) có nghiệm duy nhất

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình: $(x^2+1)(x-1)+2\sqrt{5-x}+\sqrt[3]{2x+1}=5 \quad (*)$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \quad 5$

Nhẩm được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình và $\sqrt{5-x}-2=\frac{1-x}{\sqrt{5-x}+2}<0$

Do vậy ta tiến hành truy ngược dấu biểu thức này, viết lại phương trình như sau:

$$(x^2+1)(x-1)+\sqrt{5-x}\left(2-\sqrt{5-x}\right)+\left(\sqrt[3]{2x+1}-1\right)+1-x=0$$

$$\left(x^2 \quad 1\right)\left(x \quad 1\right) \quad \sqrt{5 \quad x}.\frac{x-1}{2+\sqrt{5-x}} \quad \frac{2\left(x-1\right)}{\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1} \quad 1 \quad x \quad 0$$

$$\left(x \quad 1\right) \; x^2 \quad \frac{\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}} \quad \frac{2}{\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1} \quad 0$$

$$x=1$$

$$x^2+\frac{\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}+\frac{2}{\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1}=0\left(1\right)$$

Với $x \quad 5$ thì (1) luôn dương nên nó vô nghiệm

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2. Giải phương trình $10x+2=\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$

Hướng dẫn

Nhận xét: Ta thấy phương trình có một nghiệm $x=0$, thay vào hai căn đều có kết quả bằng 1, nhưng khi lên hợp thông thường thì cả hai sẽ bị mang dấu trái dấu so với phần còn lại. Do đó ta sẽ truy ngược dấu ở cả hai biểu thức trên. Ta có lời giải:

Điều kiện: $x \quad \frac{-1}{4}$

Ta có: $10x+2=\sqrt{4x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$

$$\sqrt{4x \quad 1}\left(\sqrt{4x \quad 1} \quad 1\right) \quad \sqrt[3]{3x \quad 1}\left(\sqrt[3]{\left(3x \quad 1\right)^2} \quad 1\right) \quad 3x \quad 0$$

$$\frac{4x\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+1} \quad \frac{\left(3x+2\right).3x.\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^4}+\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}+1} \quad 3x \quad 0$$

$$x=0$$

$$\frac{4\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{3\left(3x+2\right)\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^4}+\sqrt[3]{\left(3x+1\right)^2}+1}+3=0 \;\; (1)$$

Với $x \quad \frac{-1}{4}$ thì (1) luôn dương nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$

Bài 3. Giải phương trình: $x^2+3x-8-\sqrt{2x-3}=\sqrt[3]{x-1}$

Hướng dẫn

Điều kiện: $x \quad \frac{3}{2}$

Ta thấy: $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình, thay vào hai căn đều cho kết quả bằng 1.

$$x^2 \quad 3x \quad 8 \quad \sqrt{2x \quad 3} \quad \sqrt[3]{x \quad 1} \quad 0$$

$$\sqrt{2x \quad 3}\left(\sqrt{2x \quad 3} \quad 1\right) \quad \sqrt[3]{x \quad 1}\left(\sqrt[3]{\left(x \quad 1\right)^2} \quad 1\right) \quad x^2 \quad 4 \quad 0$$

$$\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1} \quad \frac{x\left(x-2\right)}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^4}+\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}+1} \quad \left(x \quad 2\right)\left(x \quad 2\right) \quad 0$$

$x = 2$

$$\frac{2\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}+\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}+(x+2)=0 \quad (1)$$

Với $x \quad \frac{3}{2}$ thì (1) luôn dương nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

$$4x-2=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}$$

- Giải pháp 5: Liên hợp thuận giữa các biểu thức trong phương trình

Phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=k\left[f(x)-g(x)\right]$ ***hoặc***

$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}=k\left[f(x)-g(x)\right]$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$

Phân tích

Để ý thì thấy $(2x-3)-x=x-3$ và $2x-6=2(x-3)$, do đó ta có thể sử dụng liên hợp để làm xuất hiện nhân chung $x-3$. Ta có lời giải như sau

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho biến đổi được thành:

$$\frac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3)$$

$$(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2\right)=0$$

$$x=3 \text{ hoặc } \frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2$$

Ta có với $x \ge \frac{3}{2}$ thì $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x} \ge \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$ do đó $\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}} < 1$.

Từ đó ta được $\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2$ vô nghiệm khi $x \ge \frac{3}{2}$.

Kết hợp với điều kiện xác định của phương trình ta được $x=3$ là nghiệm duy nhất.

Lời bình

Ngoài cách giải như trên, ta có thể sử dụng biến đổi nâng lên lũy thừa để giải phương trình. Sau hai lần nâng lên lũy thừa ta thu được phương trình bậc bốn. Nhẩm một số giá trị ta thấy $x=3$ là một nghiệm, như vậy phương trình bậc bốn có thể phân tích được. Tuy nhiên với $x=3$ là một nghiệm, ta dự đoán khi phân tích phương trình thành tích sẽ có nhân tử chung là $x-3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

Phân tích

Ta có: $2\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{4x^2-4x+4}$ và $\left(4x^2+5x+1\right)-\left(4x^2-4x+4\right)=9x-3$. Do vậy ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung là $9x+3$. Ta có lời giải như sau:

Lời giải

+) Điều kiện: $\begin{cases} 4x^2+5x+1\ge 0 \\ x^2-x+1\ge 0 \end{cases}$

+) Ta có phương trình

$\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-4x+4}=9x-3$

$\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-4x+4}\right)\left(\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}\right)}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}=9x-3$

$\dfrac{9x-3}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}=9x-3$

$(9x-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-1\right)=0$

$x=\dfrac{1}{3}(tm)$ hoặc $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}-1=0\ (*)$

+) Ta có $(*)\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}}=1$

$\sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}=1,\ (**)$

+) Ta có $\sqrt{4x^2-4x+4}=\sqrt{(2x-1)^2+3}\ge\sqrt{3}\Rightarrow VT(**)\ge\sqrt{3}>1=VP\Rightarrow PT(**)$ vô nghiệm.

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Lời bình

Lời bình 1: Nhiều bạn không để ý việc đưa giá trị 2 của biểu thức $2\sqrt{x^2-x+1}$ vào trong dấu căn sẽ gặp khó khăn khi giải phương trình này.

Lời bình 2: Ta có thể giải (**) bằng phương pháp hệ tạm như sau:

Kết hợp (**) và đề bài ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{4x^2+5x+1}+\sqrt{4x^2-4x+4}=1 \\ \sqrt{4x^2+5x+1}-\sqrt{4x^2-4x+4}=9x-3 \end{cases}$

Cộng vế theo vế 2 phương trình của hệ ta có: $2\sqrt{4x^2+5x+1}=9x-2$

$\begin{cases} x\ge\dfrac{2}{9} \\ 4\left(4x^2+5x+1\right)=(9x-2)^2 \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x+2}+x^2=\sqrt{3x-2}+x+2$

Phân tích

Ta có: $(3x-2)-(x+2)=2x-4=2(x-2)$ và $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. Do vậy ta có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung là $x-2$. Ta có lời giải như sau:

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình $x\ge\dfrac{2}{3}$. Biến đổi phương trình đã cho ta được:

$x^2-x-2=\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}$

$\frac{2x-4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}=(x-2)(x+1)$

$(x-2)\left(\frac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}-x-1\right)=0$

$x-2=0$ hoặc $\frac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}-x-1=0$

Với $x\ge\frac{2}{3}$ ta có $\frac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$ và $x+1\ge\frac{2}{3}+1>1$.

Do đó $\frac{2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}-x-1=0$ vô nghiệm.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Lời bình

Ở bài toán này, nếu học sinh không tìm được mối liên hệ giữa hai biểu thức: $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}$ và x^2-x-2 thì sẽ gặp khó khăn khi giải bài toán này. Tuy nhiên, học sinh có thể sử dụng phương pháp nhẩm nghiệm để tìm các nhân liên hợp khác mà vẫn đưa về được nhân tử chung là $x+2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Hướng dẫn

Điều kiện xác định của phương trình là $x\in R$.

Nhận thấy $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}>0$ với mọi x. Do đó $x+4>0$

Xét $\sqrt{2x^2+x+9}=\sqrt{2x^2-x+1}$

$2x^2+x+9=2x^2-x+1$

$x+4=0$, không thỏa mãn.

Do đó $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}\ne0$, khi đó biến đổi phương trình đã cho ta được:

$$\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}\right)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4$$

$$\frac{(2x^2+x+9)-(2x^2-x+1)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4$$

$$\frac{2(x+4)}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}=x+4$$

$$(x+4)\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}-1\right)=0$$

$\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\\ \sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\end{cases}$$

Do đó ta được $2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6$

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 4\left(2x^2+x+9\right)=\left(x+6\right)^2 \end{cases}$$

$x=0$ hoặc $x=\dfrac{8}{7}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{0;\dfrac{8}{7}\right\}$.

Bài 2. Giải phương trình sau: $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

Hướng dẫn

+) Điều kiện: $x \geq \dfrac{5}{3}$

+) Phương trình tương đương với:

$$\left(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}\right)+\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}\right)=0$$

$$\frac{\left(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}\right)\left(\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}\right)}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}\right)\left(\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}\right)}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\frac{10x+1-\left(9x+4\right)}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{3x-5-\left(2x-2\right)}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\left(x-3\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

$x=3$ (tm) hoặc $\dfrac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$ (*)

Ta có $\dfrac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}>0\ \forall x \geq \dfrac{5}{3} \Rightarrow PT(*)$ vô nghiệm.

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+3x+1}+x^2=\sqrt[3]{5x+1}+2x$.

Hướng dẫn

Nhận thấy $\left(x^2+3x+1\right)-\left(5x+1\right)=x^2-2x$ và không tồn tại $x \in R$ để biểu thức x^2+3x+1 và $5x+1$ đồng thời bằng 0. Do đó ta sử dụng phép nhân lượng liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung x^2-2x. Từ đó ta có lời giải như sau

$$\sqrt[3]{x^2+3x+1}+x^2=\sqrt[3]{5x+1}+2x$$

$$\sqrt[3]{x^2+3x+1}-\sqrt[3]{5x+1}+x^2-2x=0$$

$$\frac{x^2-2x}{\left(\sqrt[3]{x^2+3x+1}\right)^2-\sqrt[3]{x^2+3x+1}.\sqrt[3]{5x+1}+\left(\sqrt[3]{5x+1}\right)^2}+x^2-2x=0$$

$$\left(x^2-2x\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2+3x+1}\right)^2-\sqrt[3]{x^2+3x+1}.\sqrt[3]{5x+1}+\left(\sqrt[3]{5x+1}\right)^2}+1\right)=0$$

Dễ thấy $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2+3x+1}\right)^2-\sqrt[3]{x^2+3x+1}.\sqrt[3]{5x+1}+\left(\sqrt[3]{5x+1}\right)^2}+1>0$ với mọi x.

Do đó từ phương trình trên ta được x^2-2x hay $x=0;x=2$ là nghiệm của phương trình.

Bài 4. Giải phương trình sau: $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Hướng dẫn

+) Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-5x+1\ge 0\\ x^2-2\ge 0\\ 3\left(x^2-x-1\right)\ge 0\\ x^2-3x+4\ge 0\end{cases}$

+) Biến đổi phương trình đã cho ta được:

$$\left(\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}\right)+\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-2}\right)=0$$

$$\frac{\left[\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}\right]\left[\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}\right]}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0$$

$$\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{-3x+6}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0$$

$$\left(-x+2\right)\left[\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}\right]=0$$

$x=2\ (tm)$ hoặc $\frac{2}{\sqrt{3x^2-5x+1}+\sqrt{3\left(x^2-x-1\right)}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2}}=0(*)$

Với điều kiện căn có nghĩa ta thấy $VT\left(*\right)>0$ suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{2\right\}$.

Bài 5. *(Trích đề học sinh giỏi toán 9 cấp tỉnh Hà Tĩnh năm 2022-2023)*

Giải phương trình $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$.

Hướng dẫn

ĐKXĐ: $x\ge 0$.

Ta có

$$\sqrt{3x^2+33}-\left(x+5\right)=\left(x+2\right)-3\sqrt{x}$$

$$\frac{2x^2-10x+8}{\sqrt{3x^2+33}+x+5}=\frac{x^2-5x+4}{x+2+3\sqrt{x}}$$

$$(1-x)(x-4)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+33}+x+5}-\frac{1}{x+2+3\sqrt{x}}\right)=0$$

Xét $(x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

Xét $\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+33}+x+5}-\frac{1}{x+2+3\sqrt{x}}\right)=0$

$$\sqrt{3x^2+33}-6\sqrt{x}=x-1$$

$$\frac{3(x-1)(x-11)}{\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}}-(x-1)=0$$

Với $x=1$ là nghiệm.

Với $x\neq 1$, ta có :

$$\frac{3(x-11)}{\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}}=1$$

$$\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}=3x-33$$

Kết hợp với $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$, được:

$$x-3\sqrt{x}-40=0$$

$$\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-8\right)=0$$

$$x=64$$

Phương trình có tập nghiệm $\{1;4;64\}$.

- Giải pháp 6: Liên hợp nghịch giữa các biểu thức trong phương trình

Phương trình có dạng: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=k[f(x)-g(x)]$ ***hoặc***

$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=k[f(x)-g(x)]$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Phân tích

Để ý thì thấy $(x^2+x-2)-(x-1)=x^2-1$, do đó ta có thể sử dụng liên hợp để làm xuất hiện nhân tử chung x^2-1. Tuy nhiên, khi nhân liên hợp ta sẽ thấy có mẫu thức là $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}$. Vì vậy ta cần xét trường hợp $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=0$ trước khi nhân liên hợp. Ta có lời giải như sau

Lời giải

+) Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x-2\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$

+) TH1: $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=0$

$\begin{cases} x\geq 1 \\ x^2+x-2=x-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x = 1 \quad (tm) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \ge 1 \\ x = -1 \ (l) \end{cases}$$

+) TH2: $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\ne 0$

Biến đổi phương trình đã cho ta được:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}} = x^2-1.$$

$$\frac{x^2+x-2-(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}} = x^2-1.$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}} = x^2-1$$

$$x^2-1=0 \text{ hoặc } \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}} = 1$$

+) TH1:

$x^2-1=0$

$x=1(tm)$; $x=-1(ktm)$

+) TH2: $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=1$, kết hợp với đề bài ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta có:

$$2\sqrt{x-1}=x^2-2$$

$$\begin{cases} x^2 \ge 2 \\ 4x-4=x^4-4x^2+4 (*) \end{cases}$$

PT (*) biến đổi được thành:

$$x^4-4x^2-4x+8=0$$

$$x^2\left(x^2-4\right)-4(x-2)=0$$

$$(x-2)\left[x^2(x+2)-4\right]=0$$

$$(x-2)\left[x^3+2\left(x^2-2\right)\right]=0$$

$x=2\ (tm)$ hoặc $x^3+2\left(x^2-2\right)=0\,(ktm)$

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là: $S=\{1;2\}$.

Lời bình

Nhược điểm của phương pháp là lượng nhân thêm ở dưới mẫu khi liên hợp có thể bằng 0 và chứa nghiệm của phương trình nên các em làm rất dễ sai sót. Do vậy ta có cách làm thứ 2 như sau:

Cách 2:

+) Điều kiện: $\begin{cases} x^2+x-2\ge 0 \\ x-1\ge 0 \end{cases}$

+) Phương trình biến đổi được thành:

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(x^2+x-2\right)-\left(x-1\right)$

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2$

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)$

$\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0$ hoặc $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0$

+) TH1: $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0$

$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$

$x=1(tm)$

+) TH2: $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=1$, kết hợp với đề bài ta có hệ:

$\begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1 \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta có: $2\sqrt{x-1}=x^2-2$

$\begin{cases} x^2\ge 2 \\ 4x-4=x^4-4x^2+4(*) \end{cases}$

PT (*) biến đổi được thành:

$x^4-4x^2-4x+8=0$

$x^2\left(x^2-4\right)-4\left(x-2\right)=0$

$\left(x-2\right)\left[x^2\left(x+2\right)-4\right]=0$

$\left(x-2\right)\left[x^3+2\left(x^2-2\right)\right]=0$

$x=2$ (tm) hoặc $x^3+2\left(x^2-2\right)=0(ktm)$

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là: $S=\{1;2\}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=x^2-1$

Phân tích

Ta nhận thấy $\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)=x^2-1$, do đó thay vì nhân liên hợp vế trái của phương trình ta có thể phân tích vế phải của phương trình về dạng $\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)$. Từ đây ta có lời giải:

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 1$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)$$

hay ta được

$$\left(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1\right)=0$$

$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0$ hoặc $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0$

- Với $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0$

$$\begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x-1=0 \end{cases}$$

$x=1$.

- Với $\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0$

$$\begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ x^4-4x^2-4x+8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge\sqrt{2} \\ (x-2)(x^3+2x^2-4)=0 \end{cases}$$

Ta có $x^3+2x^2-4\ge 2\sqrt{2}+4-4=2\sqrt{2}>0$ với mọi $x\ge\sqrt{2}$.
Do đó từ phương trình trên ta được $x-2=0$ hay $x=2$.
Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;2\}$.

Lời bình

Ở bài toán này ta nhận thấy $(x^2+x-2)-(x-1)=x^2-1$ nên ta hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp nhân liên hợp để làm xuất hiện nhân chung x^2-1 và giải như ví dụ 1. Tuy nhiên cách phân tích vế phải sẽ đơn giản hơn là nhân liên hợp vế trái.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\sqrt{x(x+2)}+\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}$

Phân tích

Để ý thì thấy $x(x+2)-x(x-1)=-3x$ và $2\sqrt{x^2}=2|x|$, do đó ta có thể sử dụng liên hợp để giải bài toán này.

Mặt khác, $\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x-1)}=0\Rightarrow x=0$, không thuộc tập xác định nên ta có $\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x-1)}\ne 0$ với mọi x thuộc tập xác định. Do vậy ta có thể nhân liên hợp luôn mà không cần xét hai trường hợp như ở ví dụ 1.

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\le -2$ hoặc $x\ge 1$.
Để ý rằng $\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x(x-1)}\ne 0$, do đó phương trình đã cho biến đổi được thành:

$$\frac{x^2-x-x^2-2x}{\sqrt{x(x-1)}-\sqrt{x(x+2)}}=2|x|$$

$$\frac{-3x}{\sqrt{x(x-1)}-\sqrt{x(x+2)}}=2|x|$$

- Nếu $x \geq 1$ thì ta có $\begin{cases} \sqrt{x(x-1)} - \sqrt{x(x-2)} = \dfrac{-3}{2} \\ \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2x \end{cases}$

$2\sqrt{x(x-1)} = 2x - \dfrac{3}{2}$

$4x^2 - 4x = 4x^2 - 6x + \dfrac{9}{4}$

$x = \dfrac{9}{8}(tm)$

- Nếu $x \leq -2$ thì ta có $\begin{cases} \sqrt{x(x-1)} - \sqrt{x(x-2)} = \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2x \end{cases}$

$2\sqrt{x(x-1)} = 2x + \dfrac{3}{2}$

$4x^2 - 4x = 4x^2 + 6x + \dfrac{9}{4}$

$x = -\dfrac{9}{40}(l)$

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là: $S = \left\{\dfrac{9}{8}\right\}$.

Lời bình

Lời bình 1: Ở bài toán này, học sinh có thể sẽ quên mất $2\sqrt{x^2} = 2|x|$ mà biến đổi luôn thành $2\sqrt{x^2} = 2x$ từ đó dẫn đến việc bị thiếu nghiệm.

Lời bình 2: Ngoài cách giải như trên ta có thể giải phương trình bằng cách sau.

- Nếu $x \geq 1$ ta chia cả hai vế cho $\sqrt{x}$ ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}$

Bình phương hai vế sau đó giải phương trình ta tìm nghiệm của phương trình.

- Nếu $x \leq -2$, đặt $t = -x \geq 2$ và thay vào phương trình ta được

$$\sqrt{t(t-2)} + \sqrt{t(t+1)} = 2\sqrt{(t)^2}$$

$$\sqrt{t-2} + \sqrt{t+1} = 2\sqrt{t^2}$$

Bình phương hai vế tìm được t rồi từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4: Giải phương trình $2 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = x$

Phân tích

Nhận thấy $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1}\right) = 2(x-2)$, do đó nếu ta thực hiện nhân liên hợp kiểu $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = \dfrac{\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1}} = \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1}}$ thì phương trình sẽ có nhân tử chung là $x-2$. Tuy nhiên một vấn đề nảy sinh ở đây là lượng liên hợp ta nhân vào chưa đảm bảo khác 0. Để khắc phục vấn đề này ta có thể xét hai trường hợp $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1} = 0$ và $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1} \neq 0$. Nhưng thay vì thực hiện cách khác phục như trên ta có thể biến đổi theo cách ngược lại đó là $2(x-2)=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge \frac{5}{3}$. Phương trình đã cho biến đổi được thành:

$$2(x-2)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$$

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)-2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)=0$$

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}\right)\left[\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\right)-2\right]=0$$

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=0$ hoặc $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0$

- Với $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}=0$ hay $\begin{cases}\sqrt{x-1}=0\\ \sqrt{3x-5}=0\end{cases}$, hệ vô nghiệm.
- Với $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}-2=0$, biến đổi phương trình ta được

$$\sqrt{3x-5}=\sqrt{x-1}+2$$

$$x-4=2\sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases}x\ge 4\\ x^2-12x+20=0\end{cases}$$

$$x=10$$

Kết hợp điều kiện xác định ta được nghiệm của phương trình là $x=10$.

Lời bình

Như phân tích ở trên, bài toán này vẫn giải được theo cách nhân liên hợp, tuy nhiên cần chú ý xét hai trường hợp $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}=0$ và $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-1}\ne 0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

Hướng dẫn

+) Điều kiện: $\begin{cases}2x^2+x+9\ge 0\\ 2x^2-x+1\ge 0\end{cases}$

+) Phương trình đã cho biến đổi được thành:

$$\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=\frac{\left(2x^2+x+9\right)-\left(2x^2-x+1\right)}{2}$$

$$\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+9}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-x+1}\right)^2}{2}$$

$$\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}\right)}{2}$$

$$\left(\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}\right)\left(\frac{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}{2}-1\right)=0$$

$\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=0$ hoặc $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}}{2}-1=0$

+) Với $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=0$ tương đương $\begin{cases}2x^2+x+9=0\\2x^2-x+1=0\end{cases}$ vô nghiệm.

+) Với $\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2$, kết hợp với giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4\\\sqrt{2x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-x+1}=2\end{cases}$$

Trừ vế theo vế 2 phương trình của hệ ta có: $2\sqrt{2x^2-x+1}=x+2$

$$\begin{cases}x\ge -2\\4\left(2x^2-x+1\right)=x^2+4x+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -2\\7x^2-8x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -2\\x=0\ \ (tm)\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x\ge -2\\x=\dfrac{8}{7}\ (tm)\end{cases}$$

+) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là: $S=\left\{0;\dfrac{8}{7}\right\}$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{9x^2-8x+1}+3\sqrt{x^2-x+1}=8-x$

Hướng dẫn

Điều kiện xác định của phương trình là $x\le\dfrac{4-\sqrt{7}}{8}$ hoặc $\dfrac{4+\sqrt{7}}{8}\le x<8$.

+ Xét $\sqrt{9x^2-8x+1}=3\sqrt{x^2-x+1}$, phương trình vô nghiệm.

+ Xét $\sqrt{9x^2-8x+1}\ne 3\sqrt{x^2-x+1}$. Khi đó phương trình đã cho biến đổi được thành:

$$\frac{x-8}{\sqrt{9x^2-8x+1}-3\sqrt{x^2-x+1}}=8-x$$

$$\frac{1}{\sqrt{9x^2-8x+1}-3\sqrt{x^2-x+1}}=-1$$

$$\sqrt{9x^2-8x+1}-3\sqrt{x^2-x+1}=-1$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{9x^2-8x+1}-3\sqrt{x^2-x+1}=-1\\\sqrt{9x^2-8x+1}+3\sqrt{x^2-x+1}=8-x\end{cases}$

Suy ra ta được $6\sqrt{x^2-x+1}=9-x$

$$\begin{cases}9-x\ge 0\\36\left(x^2-x+1\right)=(9-x)^2\end{cases}$$

$x=\dfrac{9\pm 6\sqrt{46}}{35}$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được tập nghiệm $S=\left\{\frac{9-6\sqrt{46}}{35};\frac{9+6\sqrt{46}}{35}\right\}$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{-x^2+x-1}+\sqrt{2x-1}+x^2+x=2$.

Hướng dẫn

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình đã biến đổi được thành:

$$\left(\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(x^2-1\right)=0$$

$$\frac{(x-1)(x^2+1)}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(x+1)=0$$

$$(x-1)\left(\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+1\right)=0$$

Dễ thấy $\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(-x^2+x-1)^2}-x\sqrt[3]{-x^2+x-1}+x^2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+1>0$ với mọi $x\ge\frac{1}{2}$.

Do đó từ phương trình trên ta được $x=1$, thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Bài 4. Giải phương trình $(x+3)\sqrt{48-x^2-8x}=x-24$

Hướng dẫn

Điều kiện xác định của phương trình là $-12\le x\le 4$. Phương trình đã cho biến đổi được thành.

$$(x+3)\left(\sqrt{48-8x-x^2}+x\right)=x^2+4x-24$$

+ Xét trường hợp:

$\sqrt{48-8x-x^2}=x$

$\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+4x-24=0\end{cases}$

$x=2\sqrt{7}-2$

Thay vào phương trình đã cho ta thấy $x=2\sqrt{7}-2$ không thỏa mãn.

+ Xét trường $\sqrt{48-8x-x^2}\ne x$ tương đương $x\ne 2\sqrt{7}-2$. Khi đó

$\sqrt{48-8x-x^2}-x\ne 0$. Từ đó

$(x+3)\left(\sqrt{48-8x-x^2}+x\right)=x^2+4x-24$

$-2(x+3).\frac{x^2+4x-24}{\sqrt{-x^2-8x+48}-x}=x^2+4x-24$

Hay $\left(x^2+4x-24\right)\left(\frac{2x+6}{\sqrt{48-8x-x^2}-x}+1\right)=0$

$x^2+4x-24=0$ hoặc $\sqrt{48-8x-x^2}=-x-6$

+ Với $x^2+4x-24=0$

$x=-2\sqrt{7}-2$ hoặc $x=2\sqrt{7}-2$

+ Với $\sqrt{48-8x-x^2}=-x-6$

$$\begin{cases} x\le -6 \\ x^2+10x-6=0 \end{cases}$$

$x=-5-\sqrt{31}$

Đối chiếu với các trường hợp ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2\sqrt{7}-2;-5-\sqrt{31}\right\}$.

Bài 5. Giải phương trình $2\sqrt{x^2-7x+10}=x+\sqrt{x^2-12x+20}$.

Hướng dẫn

Điều kiện xác định của phương trình là $x\ge 10$ hoặc $x\le 2$.

Cũng bằng cách kiểm tra ta thấy phương trình đã cho nhận $x=1$ làm một nghiệm nên ta có thể đưa phương trình về dạng phương trình tích xuất hiện nhân tử $(x-1)$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$2\left[\sqrt{x^2-7x+10}-(x+1)\right]=\sqrt{x^2-12x+20}-(x+2)$$

Ta có $\sqrt{x^2-7x+10}+(x-1)\ne 0$ và $\sqrt{x^2-12x+20}+(x+1)\ne 0$ với x thuộc điều kiện xác định.

Do đó phương trình trên tương đương với

$$\frac{-18(x-1)}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}=\frac{-16(x-1)}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}$$

$$(x-1)\left(\frac{9}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}-\frac{8}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}\right)=0$$

$x-1=0$ hoặc $\dfrac{9}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}-\dfrac{8}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}=0$

- Với $x-1=0$ tương đương $x=1$, thỏa mãn điều kiện xác định.
- Với $\dfrac{9}{\sqrt{x^2-7x+10}+x+1}-\dfrac{8}{\sqrt{x^2-12x+20}+x+2}=0$

Ta có phương trình $8\sqrt{x^2-7x+10}-9\sqrt{x^2-12x+20}=x+10$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có hệ sau

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2-7x+10}-9\sqrt{x^2-12x+20}=x+10 \\ 2\sqrt{x^2-7x+10}-\sqrt{x^2-12x+20}=x \end{cases}$$

Do đó ta được $5\sqrt{x^2-7x+10}=4x-5$

$$\begin{cases} x\ge \dfrac{5}{4} \\ x^2-15x+25=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$$

Thử lại vào phương trình ban đầu ta được tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{1; \frac{15+5\sqrt{5}}{2}\right\}$$

**** Ưu điểm của các giải pháp:***

- Học sinh của tôi không còn lúng túng về phương pháp giải cho từng dạng bài trên.

- Biết lựa chọn cách giải hợp lý, nhanh, gọn.
- Hầu hết đã trình bày được lời giải chặt chẽ.

****Nhược điểm của các giải pháp (nếu có):Không có***

2.2. Tính mới, tính sáng tạo của các giải pháp mới

Kết hợp với máy tính cầm tay để nhẩm nghiệm để xử lý các liên hợp phức tạp, giúp giải quyết nhanh các phương trình các phương trình có nghiệm lẻ hoặc nghiệm vô tỷ.

2.*3. Khả năng nhân rộng của sáng kiến*

- Đánh giá khả năng nhân rộng: Sáng kiến đã được các đồng chí dạy Toán lớp 9 của 03 nhà trường: THCS Trực Đại, THCS Trực Thắng, THCS Trực Thái áp dụng và được đánh giá đạt hiệu quả cao khi được vào áp dụng.

- Đánh giá phạm vi ảnh hưởng: Sáng kiến kinh nghiệm trên đây được giáo viên 03 nhà trường áp dụng đạt hiệu quả cao, có sức lan tỏa tới các trường bạn trong cụm chuyên môn và trong tỉnh Ninh Bình.

2.4. Hiệu quả áp dụng, lợi ích thu được từ sáng kiến (phân tích rõ hiệu quả, lợi ích thu được trong thời gian áp dụng sáng kiến, bao gồm: hiệu quả về mặt khoa học, kinh tế, xã hội…

- Hiệu quả về mặt khoa học: - Kết quả cụ thể như sau:

Lớp	**Giỏi**	**Khá**	**Trung bình**	**Yếu và kém**
9A	40%	40%	10%	10%
9B	15%	25%	40%	20%

Chính vì vậy nên khi nghiên cứu đề tài này tôi đã rút ra một số bài học cho bản thân trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi. Đó là:

Trước hết hệ thống hóa kiến thức cơ bản và nâng cao cho dạng toán sắp dạy. Phần này giáo viên có thể cho học sinh hệ thống hóa kiến thức cơ bản, giáo viên cung cấp kiến thức nâng cao cho học sinh.

Sau đó hệ thống các phương pháp cơ bản để giải từng loại toán đó (giáo viên có thể nêu hoặc để học sinh phát hiện)

Thông qua quá trình luyện bài tập, Giáo viên khái quát hóa tổng quát hóa từng loại bài, từng dạng bài tập.

- Hiệu quả về mặt kinh tế: Tối ưu thời gian: Chuyển đổi phương trình chứa căn bậc hai phức tạp thành phương trình đại số đơn giản, rút ngắn thời gian giải toán trong các kì thi tuyển sinh và học sinh giỏi.

Tăng độ chính xác: Xử lý căn thức bậc hai, căn bậc ba hiệu quả, giảm sai sot so với phương pháp bình phương thông thường.

Phát triển tư duy: Nâng cao kì năng biến đổi đại số, phân tích nhân tử và tư duy nhẩm nghiệm.

- Hiệu quả xã hội: Trong quá trình dạy học Đại số, tôi đã áp dụng đề tài này không chỉ để dạy và bồi dưỡng cho học sinh khá giỏi mà còn linh hoạt dạy cho học sinh đại trà. Đặc biệt là đối với học sinh lớp 9, bắt đầu làm quen với giải phương trình vô tỉ, giải phương trinh bậc cao. Tuy lúc đầu các em còn ngại học và làm các bài tập nâng cao và nói chung rất sợ các bài toán nâng cao về giải phương trình vô tỉ. Hầu như học sinh chỉ có ý thức làm bài tìm một lời giải và dừng lại không suy nghĩ thêm sau khi có kết quả của bài toán, thỏa mãn với chính mình. Các em chưa thấy được tác dụng mạnh của việc nhìn bài toán dưới nhiều góc độ, nhiều khía cạnh khác, rèn cho mình được thói quen suy nghĩ tích cực, phát triển tư duy sáng tạo, tính kiên trì, độc lập (những đức tính tốt và cần thiết của người học toán). Song, sau một thời gian áp dụng đề tài và dạy học sinh theo ý tưởng trên; đến nay, hầu hết các em đã tham gia, hưởng ứng một cách tích cực, chủ động, vận dụng kiến thức khá thành thạo khi làm một số dạng bài có liên quan từ dễ đến khó. Quan trọng hơn, các em không còn cảm thấy giải phương trình vô tỉ đáng ngại, đáng sợ nữa. Do đó, trong học toán nói chung và làm bài tập giải phương trình vô tỉ nói riêng các em đã nhiệt tình, chủ động, tích cực hơn, có nhiều phát hiện thể hiện sự tìm tòi, sáng tạo bước đầu rất tích cực.

Khi tôi sử dụng phương pháp giải phương trình vô tỉ trong nhiều năm học gần đây thì kết quả cho thấy học sinh đều có ý thức thi đua nhau học tập, rất hào hứng phát biểu các suy nghĩ, tìm tòi, phát hiện của mình về cách giải …. Và tôi thấy tinh thần học tập của các em sôi nổi, phấn khởi hơn, khả năng tự nghiên cứu toán học của các em được phát huy một cách tích cực; kết quả học tập môn toán có nhiều tiến bộ. Các em không những nắm vững kiến thức trong sách giáo khoa mà các em còn có cố gắng trong việc tìm hiểu giải các bài toán nâng cao, các bài toán khó, bước đầu có thói quen tốt: biết chịu khó, tích cực tìm tòi khai thác, phát triển các bài toán cho trước. Các em học sinh có hứng thú hơn trong việc học toán đặc biệt là những em học sinh Khá, Giỏi. Nhiều em đã độc lập tìm tòi ra nhiều cách giải khác nhau. Từ những bài toán đã được học nhiều em đã biết nghiên cứu sâu, mở rộng, phát triển các bài toán cho trước. Thông qua đó giúp cho học sinh nắm sâu về kiến thức, vận dụng kiến thức thành thạo để giải quyết các bài toán khác. Từ đó giúp học sinh hình thành những phẩm chất và năng lực của mình. Rèn cho các em sự tự tin, khả năng sáng tạo và tìm ra lời giải nhanh nhất. Qua các kì thi đặc biệt là kì thi học sinh giỏi cấp huyện thì tôi thấy các em đã biết cách định hướng làm bài tập hình, các em đi thi đều đạt giải và nhiều em đạt giải cao. Đồng đội học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 do tôi đảm nhận trong năm học qua với 2 em học sinh đi thi đều đạt giải Nhì.

Từ việc áp dụng phương pháp giải phương trình vô tỉ bằng phương pháp nâng lên lũy thừa đã giúp cho các em rất tự tin, hào hứng trong các giờ học. Vì vậy, khi các em lên các lớp trên, đặc biệt đối với những em học sinh khá giỏi ngoài việc dễ dàng tiếp cận các kiến thức mới các em sẽ có phương pháp giải các bài tập giải phương trình vô tỉ.

Sáng kiến của tôi được các đồng nghiệp trong tổ Toán 9 áp dụng trong quá trình giảng dạy và đã được chia sẻ cho nhiều đồng chí trong các đơn vị lân cận trong huyện và trong tỉnh thông qua mạng xã hội.

- Các hiệu quả khác: Không.

3. Danh sách những người đã tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng sáng kiến lần đầu (nếu có):

Số TT	**Họ và tên**	**Ngày tháng năm sinh**	**Nơi công tác** (hoặc nơi thường trú)	**Chức danh**	**Trình độ chuyên môn**	**Nội dung công việc hỗ trợ**
1	Phạm Thị Nhài	02/2/1977	Trường THCS Trực Thái	Giáo viên	Đại học sư phạm Toán	
2	Vũ Thị Mơ	15/12/1970	Trường THCS Trực Thái	Giáo viên – Tổ phó tổ KHTN	Đại học sư phạm Toán	
3	Dương Thị Hợi	06/10/1983	Trường THCS Trực Đại	Giáo viên	Đại học sư phạm Toán	
4	Vũ Thị Nụ	26/10/1979	Trường THCS Trực Thắng	Giáo viên	Đại học sư phạm Toán	

4. Các thông tin cần được bảo mật (nếu có)

IV. Phần kết luận

Việc giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp đóng vai trò quan trọng trong việc nâng cao kĩ năng tư duy đại số, đặc biệt giúp học sinh nắm vững cách xử lý các dạng bài toán khó, phân loại cao trong thi cử. Nó biến các phương pháp phức tạp thành tích, tọa cơ sở tìm nghiệm (nhân liên hợp ngược dấu) và giúp học sinh tránh sai lầm về điều kiện xác định. Giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp giúp giáo viên truyền tải phương pháp giải toán một cách hệ thống từ đó giúp học sinh trung bình-khá tiếp cận được các dạng toán nâng cao. Rèn luyện khả năng quan sát, biến đổi biểu thức đại số, nhận biết các cấu trúc phương trình đạc biệt (như tạo nhân tử chung, sử dụng phương pháp đáng giá).

Việc phương trình vô tỷ bằng phương pháp nhân liên hợp có ý nghĩa về mặt chuyên môn: Hệ thống hóa các bài tập, cung cấp quy trình giải từ cơ bản đến phức tạp, giúp học sinh nhìn ra phương pháp thay vì loay hoay không biết bắt đầu từ đâu. Về mặt tư tưởng: Giáo dục học sinh tính kiên trì, đam mê tìm tòi sáng tạo trong môn Toán, giúp học sinh tự tin hơn trước bài toán khó, rút ngắn thời gian giải bài, nâng cao tốc độ phản xạ với các phương trình vô tỉ.

Tôi (chúng tôi) xin cam đoan mọi thông tin nêu trong Bản mô tả là trung thực, đúng sự thật, không sao chép, vi phạm bản quyền và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật./.

XÁC NHẬN CỦA CƠ QUAN/ ĐƠN VỊ ÁP DỤNG SÁNG KIẾN	*Minh Thái, ngày 10 tháng 5 năm 2026*
(ký tên, đóng dấu)	**Tác giả**
	(Ký và ghi rõ họ tên)
U.B.N.D XÃ MINH THÁI T. NINH BÌNH TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ TRỰC ĐẠI	
HIỆU TRƯỞNG	
Đỗ Thị Châm	**Nguyễn Thị Nơ**